

11月 安倍文殊菩薩堂

【算額 第21問】

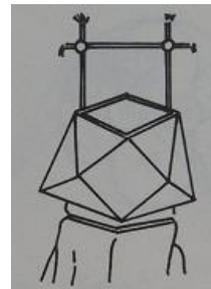
今有如図四角六面三角八面
 混面截箆
 只云面一寸
 問積幾何

(西向村 佐久間簡治 撰)



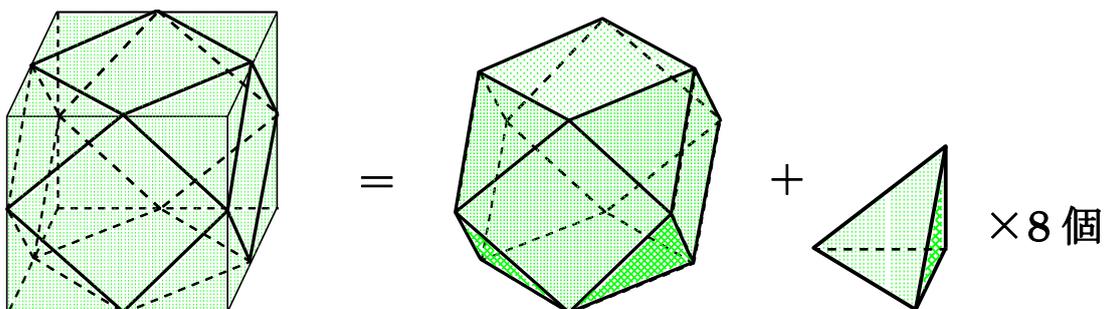
(題意)

右図のように、辺の長さが等しい
 正方形6面、正三角形8面
 からなる立体「截箆 (キリコ)」がある。
 辺の長さが1寸のとき、
 この立体の体積を求めよ。

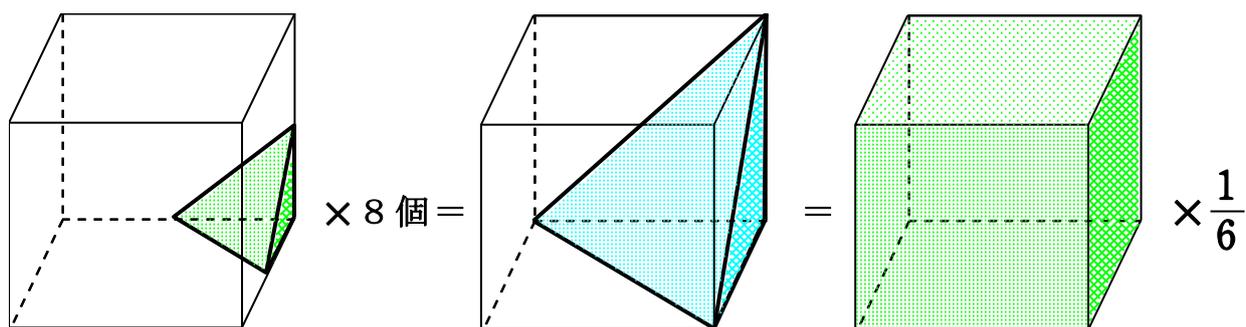


(解説)

立方体の各頂点を、そこに集まる3辺の中点を通る平面で切り取ってできるのが、立方八面体「キリコ」です。



ここで、



したがって、

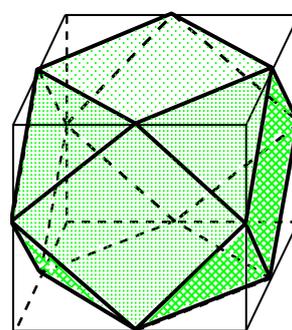
「キリコ」の体積は、(外接する) 立方体の $\frac{5}{6}$ であることが分かりました。

「キリコ」の辺の長さを1寸とすると、立方体の辺の長さは $\sqrt{2}$ ですから、その体積は $(\sqrt{2})^3$ 。

故に、「キリコ」の体積は、

$$(\sqrt{2})^3 \times \frac{5}{6} = 2\sqrt{2} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{3}\sqrt{2} = \frac{5}{3} \times 1.41421356 \dots = \text{約 } 2.357$$

答曰、積二歩三分五七有奇。



(補足)

立方体は、「陽馬」3個 \Rightarrow 「鼈臑」6個 (2種3個ずつ、鏡像) に分割されます。

立方八面体を立方体から切り出すと、体積は元の $\frac{5}{6}$ になります。つまり、「鼈臑」1個分が切り離された勘定になります。

また、切り離された8個の断片を組み替えると、立方八面体と同じ辺の長さを持つ正八面体になります。これは、立方八面体を8等分して組み替えてできる(見かけ上)立方体の、内部の「うろ」の部分に相当します。立方体の面心を頂点に持つ双対体です。

さらにこの正八面体3個分を6個の正四角錐にして立方八面体の正方形面にくっつけると、辺の長さが2倍の正八面体ができます。

『九章算術』(紀元前1世紀~紀元後2世紀)
 …立方、ゼんと、ようま、べつどう

(文責 五輪教一)